Foto: José Juan Castro

Cálculo I

Examen X

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen X

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Víctor Naranjo Cabrera

Granada, 2025

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruiz.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 10 de enero de 2025.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1. [**2 puntos**] Enuncia y demuestra el Teorema (de los ceros) de Bolzano.

Ejercicio 2. [**1 punto**] Estudia la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{n\log n}{\log(n!)}\right\}$.

Ejercicio 3. Sea la sucesión recurrente $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se pide:

a) [**1 punto**] Prueba que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y diverge positivamente (observa que $a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n$, puedes usarlo).

b) [**1 punto**] Prueba que $\left\{\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2}\right\} \to 1$ (y, en particular, $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \to 1$).

c) [**1 punto**] Prueba que $\{a_{n+1} - a_n\} \to \dfrac{1}{2}$.

d) [**1 punto**] Prueba que $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\} \to 2$.

e) [**1 punto**] Discute la convergencia de las series: $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n^2}$.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ continua, tal que $f(x) \geqslant x, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$. Se pide:

a) [**1 punto**] Probar que f alcanza un mínimo absoluto.

b) [**1 punto**] Probar que $\exists c > 0$ tal que $f(c) = \dfrac{1}{c}$.

Ejercicio 1. [**2 puntos**] Enuncia y demuestra el Teorema (de los ceros) de Bolzano.

Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces:

$$\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$$

Demostración. Hay dos posibilidades, o bien $f(a) < 0 < f(b)$, o $f(a) > 0 > f(b)$

Caso f(a) $<$ 0 $<$ f(b). Sea el conjunto $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$

Claramente, el conjunto A es no vacío ($a \in A$) y, por ser $A \subseteq [a, b] \Rightarrow A$ mayorado ($b \in M(A)$). Por tanto, $\exists c = sup(A)$, con $a \leqslant c \leqslant b$.
Usando la caracterización de supremo mediante sucesiones:

$$\underset{(x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N})}{\exists \ \{x_n\}} \longrightarrow c. \text{ Por ser } f \text{ continua en c} \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(c)$$

y, como:

$$x_n \in A, f(x_n) < 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(c) \leqslant 0 \tag{1}$$

En particular, $c \neq b$ (porque $f(b) > 0$) $\Rightarrow c < b$. Así, $\forall y \in]c, b] \Rightarrow f(y) \geqslant 0$. Podemos tomar:

$$\{y_n\} = \left\{c + \frac{b-c}{n}\right\} \to c, \text{con } f(y_n) \geqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

De nuevo, por ser f continua en c:

$$\underset{(f(y_n) \geqslant 0)}{\{f(y_n)\}} \to f(c) \Rightarrow f(c) \geqslant 0 \tag{2}$$

Por (1) y (2) $\Rightarrow \boxed{f(c) = 0}$

Caso f(a) $>$ 0 $>$ f(b) Podemos considerar $g : [a, b] \to \mathbb{R}, g = -f, \ g(x) = -f(x)$ $\forall x \in [a, b]$. La función g verifica las hipótesis del caso anterior, luego

$$\exists c \in]a, b[: g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = -g(c) = 0.$$

Ejercicio 2. [**1 punto**] Estudia la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{n \log n}{\log(n!)}\right\}$.

Llamemos $\{a_n\} = \{n \log(n)\}, \{b_n\} = \{\log(n!)\}$. Por ser $\{b_n\} \nearrow\nearrow +\infty$ podemos aplicar el crit. de Stolz

$$\left(Si \ \left\{\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right\} \longrightarrow L \Longrightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L \ (L \in \mathbb{R} \text{ ó } \pm\infty)\right)$$

Estudiemos, pues, la sucesión:

$$\left\{\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right\} = \left\{\frac{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)}{log((n+1)!) - log(n!)}\right\} = \left\{\frac{log(n+1) + n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{log(n+1)}\right\}$$

$$= \left\{1 + \frac{log((\frac{n+1}{n})^n)}{log(n+1)}\right\}$$

Llamemos $\{x_n\} = \left\{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right\}$ y $\{y_n\} = \{n\}$ Como $\{x_n\} \to 1$, podemos aplicar el crit. de Euler:

$$(\{y_n(x_n - 1)\} \to L \Longleftrightarrow \{x_n^{y_n}\} \to e^L, x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N})$$

Entonces:

$$\{y_n(x_n - 1)\} = \left\{n\left(\frac{n+1}{n} - 1\right)\right\} = \{1\} \to 1 \Rightarrow \{x_n^{y_n}\} = \left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\} \to e$$
$$\Rightarrow \left\{\log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)\right\} \to log(e) = 1$$

Por lo tanto, $\left\{1 + \dfrac{log((\frac{n+1}{n})^n)}{log(n+1)}\right\} \to 1 + 0 = 1$. Y, por Stolz, la sucesión de partida

$$\boxed{\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{n\log(n)}{log(n!)}\right\} \to 1}$$

Ejercicio 3. Sea la sucesión recurrente $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_1 + a_2 + ... + a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se pide:

a) [**1 punto**] Prueba que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y diverge positivamente (observa que $a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n$, puedes usarlo).

Probemos que $a_n \geqslant 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ (en particular, $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$), por inducción. Sea el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geqslant 1\}$. Veamos si A es inductivo:

$$a_1 = 1 \geqslant 1 \Rightarrow 1 \in A$$

Sea $k \in A$, veamos si $(k+1) \in A$:

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + a_k \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k^2 + a_k} \geqslant 1 \Rightarrow (k+1) \in A$$

Luego $a_n \geqslant 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. Así, $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1}^2 > a_n^2 \Leftrightarrow a_n^2 + a_n > a_n^2 \Leftrightarrow a_n > 0$, y $\{a_n\}$ estrictamente creciente.
Veamos si diverge por reducción al absurdo. Si $\{a_n\}$ no diverge, al ser estrictamente creciente, estará mayorada, luego $\{a_n\} \to L$.

$$\left.\begin{array}{l} \{a_{n+1}^2\} \to L^2 \\ \\ \{a_n^2 + a_n\} \to L^2 + L \end{array}\right] \xRightarrow[]{\substack{\text{(unicidad} \\ \text{del límite)}}} L^2 = L^2 + L \Rightarrow L = 0$$

Lo cual es una contradicción, ya que una sucesión creciente de positivos no puede converger a 0 y $\{a_n\} \to +\infty$

b) [**1 punto**] Prueba que $\left\{\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2}\right\} \to 1$ y, en particular, $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \to 1$.

$$\left\{\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}\right\} = \left\{\frac{a_n^2 + a_n}{a_n^2}\right\} = \left\{1 + \frac{1}{a_n}\right\} \longrightarrow 1 + 0 = 1$$

$$\left(\{a_n\} \to +\infty \Rightarrow \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to 0\right)$$

En particular, $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \left\{\sqrt{\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2}}\right\} \to \sqrt{1} = 1$

c) [**1 punto**] Prueba que $\{a_{n+1} - a_n\} \to \dfrac{1}{2}$.

$$\{a_{n+1} - a_n\} = \left\{\frac{(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)}{a_{n+1} + a_n}\right\} = \left\{\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1} + a_n}\right\} = \left\{\frac{\cancel{a_n^2} + a_n - \cancel{a_n^2}}{a_{n+1} + a_n}\right\}$$

$$= \left\{\frac{a_n}{a_{n+1} + a_n}\right\} = \left\{\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n} + 1}\right\}$$

Como por el apartado anterior, $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \to 1 \Rightarrow \left\{\dfrac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n} + 1}\right\} \to \dfrac{1}{2}$

d) [**1 punto**] Prueba que $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\} \to 2$. Como el denominador es $\{a_n\} \nearrow\nearrow +\infty$, podemos aplicar el criterio de Stolz (ya enunciado antes). Estudiamos, pues, esta otra sucesión:

$$\left\{\frac{n + 1 - n}{a_{n+1} - a_n}\right\} = \left\{\frac{1}{a_{n+1} - a_n}\right\}$$

Como por el apartado anterior, $\{a_{n+1} - a_n\} \to \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left\{\dfrac{1}{a_{n+1} - a_n}\right\} \to 2 \Rightarrow$ $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\} \to 2$.

e) [**1 punto**] Discute la convergencia de las series: $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n^2}$.

Para estudiar la serie de térm. posit. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$, aplicaremos el criterio límite de comparación:

$$\left(\begin{array}{l} a_n \geqslant 0, b_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \to L\ (L \in \mathbb{R}_0^+ \text{ ó } +\infty) \\ \text{Caso } L = 0 : \text{Si} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge} \\ \text{Caso } L = +\infty : \text{Si} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge} \\ \text{Caso } L = \mathbb{R}^+ : \text{Si} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge} \end{array}\right)$$

Compararemos con la serie armónica $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$:

$$\left\{\frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{n}}\right\}=\left\{\frac{n}{a_n}\right\}\xrightarrow[\substack{\text{(apdo.}\\ \text{anterior)}}]{}2\in\mathbb{R}^+$$

Así, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_n}$ conv. $\Leftrightarrow\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ conv. Como $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ no conv. $\Rightarrow\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_n}\text{ no conv.}}$

Para estudiar la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_n^2}$ aplicaremos de nuevo el criterio límite de comparación, comparado ahora con la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$

$$\left\{\frac{\frac{1}{a_n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right\}=\left\{\frac{n^2}{a_n^2}\right\}=\left\{\left(\frac{n}{a_n}\right)^2\right\}\xrightarrow[\substack{\text{(apdo.}\\ \text{anterior)}}]{}2^2=4\in\mathbb{R}^+$$

Así, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_n^2}$ conv. $\Leftrightarrow\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ conv. Como $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_n^2}\text{ conv.}}$

Ejercicio 4. Sea $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ continua, tal que $f(x)\geqslant x,\forall x\in\mathbb{R}_0^+$. Se pide:

a) [**1 punto**] Probar que f alcanza un mínimo absoluto.
A partir de la hipótesis, probemos que Im(f) está minorada:

$$\forall x\in\mathbb{R}_0^+, f(x)\geqslant x\geqslant 0\Rightarrow 0\text{ es minorante de Im(f).}$$

Como, además, $Im(f)$ es no vacío, $\exists\alpha=\inf(Im(f))$. Para probar si es el mínimo, bastará ver que $\alpha\in Im(f)$. Pör la caracterización de ínfimo mediante sucesiones:

$$\underset{(y_n\in Im(f)\forall n\in\mathbb{N})}{\exists\{y_n\}\longrightarrow\alpha}$$

Observemos que:

- $\{y_n\}$ convergente $\Rightarrow\{y_n\}$ acotada, en particular. mayorada $\Rightarrow\exists M>0$: $y_n\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}$
- $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in\mathbb{R}_0^+ : y_n=f(x_n)$

Luego:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ 0\leqslant x_n\leqslant f(x_n)=y_n\leqslant M\Rightarrow\{x_n\}\text{ acotada}$$

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, por ser acotada, admitirá una parcial convergente, $\exists\{x_{\sigma(n)}\} \to x_0 \in \mathbb{R}_0^+$.
Luego

$$\left.\begin{array}{l} \{f(x_{\sigma(n)})\} \xrightarrow{\text{(f continua)}} f(x_0) \\ \{y_{\sigma(n)}\} \xrightarrow{\text{(parcial)}} \alpha \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{del límite)}]{\text{(unicidad}} \alpha = f(x_0)$$

Así, $\alpha \in Im(f)$ y es el valor mínimo absluto, que se alcanza en el punto x_0.

b) [**1 punto**] Probar que $\exists c > 0$ tal que $f(c) = \dfrac{1}{c}$.
La proposición equivale a $c > 0 : cf(c) - 1 = 0$. Consideremos entonces la función: $g : [0,2] \to \mathbb{R}, g(x) = xf(x) - 1$. Vemos que es continua (pues es suma y producto de continuas). Además:

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \cdot f(0) - 1 = -1 < 0 \\ g(2) = 2 \cdot f(2) - 1 \geqslant 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0 \end{array}\right\}$$

Por el Tma. Bolzano (Ej 1) $\exists c \in]0,2[: g(c) = 0 \Rightarrow \exists c > 0,$ con $cf(c) - 1 = 0$
$\Leftrightarrow f(c) = {}^1\!/_c$